Das KAM-Theorem

Johanna Bimmermann

Das KAM-Theorem benannt nach Kolmogorov,Arnold und Moser trifft die Aussage, dass in gewisser Weise die meisten invarianten Tori eines integrablen Systems eine kleine Störung überleben. In diesem Vortrag wird diese Aussage präzise formuliert und die Grundlage zum Verständnis des Beweis geliefert. Der Beweis folgt in den späteren Vorträgen.

1 Das ungestörte System

Nach dem **Satz von Liouville-Arnold-Jost** existieren für integrable hamiltonsche Systeme Koordinaten $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, p_n)$ mit $q \in \mathbb{T}^n$ und $p \in D$, so dass

$$H(p, q) = h(p).$$

Die Koordinaten p/q werden **Wirkungs-/Winkelkoordinaten** genannt.
Wir statten $D \times \mathbb{T}^n$ mit der Standard Symplektischenform aus und nehmen immer an, dass unsere Hamilton-Funktion **reell analytisch**[1] ist. Dann erhalten wir aus den Hamilton-Gleichungen die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p} = -H_q(p, q) = 0 \qquad \dot{q} = H_p(p, q) = h_p(p).$$

Definition 1.1 (Frequenzabbildung)**.**
Wir definieren die Frequenz $\omega(p)$ zu $p \in D$ als

$$\omega : D \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n;\ p \to\ h_p(p)$$

Wir nehmen stets an, dass Ω beschränkt ist und ω ein Diffeomorphismus.

Die Hamilton-Gleichungen lassen sich einfach integrieren (daher der Name integrables System) und man erhält

$$p(t) = p_0 \qquad q(t) = q_0 + \omega(p_0)t.$$

Jede Lösung ist also eine gerade Linie, welche sich um den invarianten Torus

$$\mathcal{T}_{p_0} = \{p_0\} \times \mathbb{T}^n$$

windet. Ein solcher Torus mit linearem Fluss heißt **Kronecker-Torus**.
Man unterscheidet bei Kronecker-Tori im wesentlichen zwei Klassen.

[1]Mosers orginaler Beweis wurde für C^{333} geführt, mittlerweile ist bekannt, dass $C^{2+\varepsilon}$ genügt und Gegenbeispiele für den Fall C^2 sind bekannt.

Definition 1.2 (Resonante Frequenzen).
Die Frequenz ω heißt ***resonant****, falls*

$$\langle \omega, k\rangle = 0 \qquad \textit{für ein} \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n.$$

Sie heißt ***nicht-resonant*** *falls kein solches $0 \neq k \in \mathbb{Z}^n$ existiert.*

Im Falle nicht resonanter Frequenz liegt der Orbit des Flusses dicht im Torus. Ist die Frequenz resonant können verschiedene Situationen vorliegen, zum Beispiel:

- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-m}, 0, \ldots, 0)$ wobei $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-m})$ nicht-resonant sind. Dann zerfällt der Torus in eine m-Parameter Familie von $n-m$-Tori. Jeder Orbit liegt dicht in einem Torus dieser Familie, aber nicht dicht in $\mathcal{T}_{p_0}$.
- Die Einzel-Frequenzen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sind alle ganzzahlige Vielfache einer Frequenz ω^*. Dann ist der Orbit periodisch mit Frequenz ω^*.

2 Das gestörte System

Wir wollen nun kleine Störungen eines integrablen Systems betrachten und untersuchen, was mit den invarianten Tori geschieht. Sei also

$$H(p,q) = h(p) + f_\varepsilon(p,q), \qquad f_\varepsilon(p,q) = \varepsilon f^*(p,q,\varepsilon)$$

für ein kleines ε. Wir nehmen weiterhin an, dass alle auftauchenden Funktionen reell analytisch sind.
Um die folgenden Definitionen und die später auftretenden Parameter zu Motivieren, gebe ich hier ein eher Intuitives, als mathematisches Argument. Im Beweis des KAM-Theorems wird sich diese Intuition aber als gar nicht so falsch herausstellen. Unsere gestörte Hamilton-Funktion ist wieder von q abhängig, wir können also versuchen eine kanonische Transformation $\phi : (\tilde{p}, \tilde{q}) \mapsto (p,q)$, so dass

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = H \circ \phi(\tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{h}(\tilde{p})$$

Um eine solche Transformation zu finden machen wir den Ansatz

$$\phi = \varphi^t_{X_F}\big|_{t=1}.$$

Wir suchen also eine Funktion F, so dass ϕ der 1-Fluss des Hamiltonschen Vektorfeldes X_F ist.
Da unser hamiltonsches System „nahe“ eines Integrablen System ist, vermuten wir, dass F beinahe konstant ist. Also F_p, F_q von Ordnung ε sind. Nun Taylor-entwickeln wir obigen Ausdruck des Hamiltonians um $t = 0$ und werten in $t = 1$ aus. Dabei

vernachlässigen wir alle Terme die von Ordnung ε^2 oder höher sind.

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\tilde{p}) &= H \circ \phi(\tilde{p}, \tilde{q}) \\
&= \left[h \circ \varphi_F^t(\tilde{p}, \tilde{q}) + f_\varepsilon \circ \varphi_F^t(\tilde{p}, \tilde{q})\right]_{t=1} \\
&= \Big[h(\tilde{p}) + f_\epsilon(\tilde{q}, \tilde{p}) + t\{h, F\}(\tilde{q}, \tilde{p}) \\
&\quad + \int_0^t (1-s)\{\{h, F\}, F\} \circ \varphi_F^s(\tilde{q}, \tilde{p}) ds \\
&\quad + \int_0^t \{f_\varepsilon, F\} \circ \varphi_F^s(\tilde{q}, \tilde{p}) ds \Big]_{t=1} \\
&= [h(\tilde{p}) + t\{h, F\}(\tilde{p}, \tilde{q}) + f_\varepsilon(\tilde{p}, \tilde{q})]_{t=1} \\
&= h(\tilde{p}) + \{h, F\}(\tilde{p}, \tilde{q}) + f_\varepsilon(\tilde{p}, \tilde{q})
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass $\frac{d}{dt} H \circ \varphi_F^t = \{H, F\} \circ \varphi_F^t$ und dass $\{f_\varepsilon, F\}, \{\{h, F\}, F\}$ von Ordnung ε^2 sind. Die Poissonklammer kann man ausrechnen

$$\{h, F\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) = -\langle h_p, F_q \rangle = -\langle \omega, F_q \rangle$$

Nehmen wir weiter an, dass $h(\tilde{p}) \approx \tilde{h}(\tilde{p})$[2] erhalten wir

$$\langle \omega(\tilde{p}), F_q(\tilde{p}, \tilde{q}) \rangle = f_\varepsilon(\tilde{p}, \tilde{q})$$

Wir haben nun links und rechts periodische Funktionen in $\tilde{q}$, wir können also deren Fourierkoeffizienten vergleichen und erhalten die folgende Darstellung für F

$$F(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}_\varepsilon(\tilde{p}, k)\ e^{2\pi i \langle k, \tilde{q} \rangle}}{\langle \omega(\tilde{p}), k \rangle}$$

Man kann aber erkennen, dass die Funktion F nicht existiert, falls ω resonant ist und dass auch falls ω nicht resonant ist im Allgemeinen sehr große Summanden vorkommen, so dass wenig Hoffnung auch Konvergenz besteht. Dieses, als Problem der kleinen Teiler bekannte Phänomen, hat dazu geführt, dass man viele Jahrzehnte gebraucht hat zu beweisen, dass tatsächlich (sogar sehr viele) Kronecker Tori unter kleinen Störungen bis auch leichte Deformation erhalten bleiben. Mit diesem Problem im Hinterkopf, liegt die folgende Definition nahe.

Definition 2.1 (Stark nicht-resonante Frequenzen).
$\omega \in \Omega$ heißt stark nicht-resonant, falls Konstanten $\alpha > 0$ und $\tau > n + 1$ existieren, so dass

$$|\langle \omega, k \rangle| \geq \frac{\alpha}{|k|^{\tau - 1}} \qquad \text{für alle } 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n$$

wobei $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$.

[2]Diese Annahmen ist im Allgemeinen nicht gerechtfertigt, da dass Mittel einer Poissonklammer immer verschwindet, also $[\langle \omega, F_q \rangle] = 0$ aber $[f_\varepsilon] \neq 0$. Man kann daher eigentlich nur die Gleichung $\langle \omega, F_q \rangle = f_\varepsilon - [f_\varepsilon]$ durch Fourierentwicklung lösen. Hier bezeichnet $[f(p,q)] = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} f(p,q) dq$, für $p \in \mathbb{T}^n$ fest.

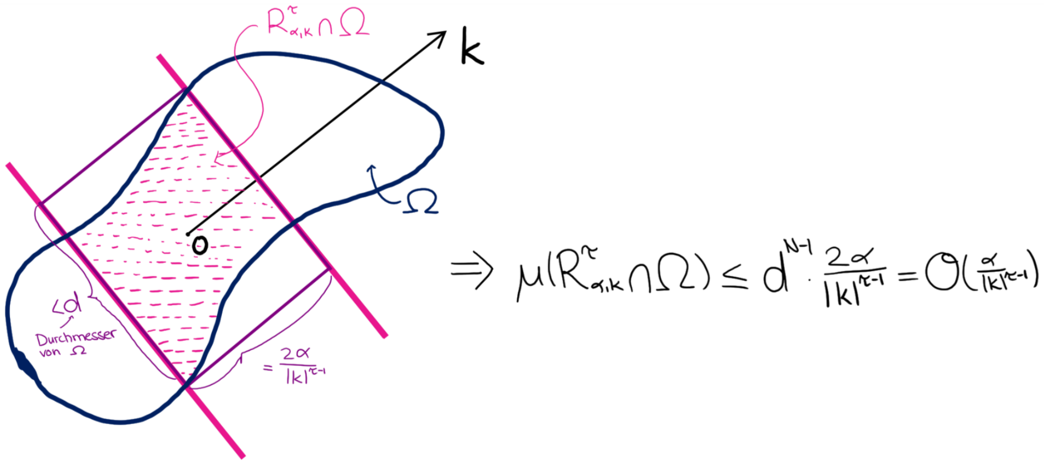
Lemma 2.2 (Existenz stark nicht-resonante Frequenzen).
Für feste $\tau > n+1$ ist die Menge der stark nicht-resonanten Frequenzen

$$\Delta^\tau = \bigcup_{\alpha>0} \Delta^\tau_\alpha, \quad \textit{mit } \Delta^\tau_\alpha = \{\omega \in \mathbb{R}^n | \ |\langle\omega, k\rangle| \geq \frac{\alpha}{|k|^{\tau-1}}, \ \forall\ 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n\}$$

nicht leer, sondern hat volles Maß.

Beweis. Betrachte das Komplement von Δ^τ_α gegeben durch

$$R^\tau_\alpha = \bigcup_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n} R^\tau_{\alpha,k} \qquad \text{mit } R^\tau_{\alpha,k} = \{\omega \in \mathbb{R}^n | \ |\langle\omega, k\rangle| < \frac{\alpha}{|k|^{\tau-1}}\}.$$



Nun lässt sich wie in der Skizze zu sehen für eine beschränkte Menge $\Omega \in \mathbb{R}^n$ das Lebesgue-Maß durch

$$\mu(\Omega \cap R^\tau_{\alpha,k}) = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{|k|^{\tau-1}}\right)$$

abschätzen. Dann ist, da $\tau \geq n+1$

$$\mu(R^\tau_\alpha \cap \Omega) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mu(\Omega \cap R^\tau_{\alpha,k}) = \mathcal{O}\left(\alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|k|^{\tau-1}}\right) = \mathcal{O}(\alpha),$$

denn $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|k|^s}$ konvergiert für $s \geq n$. Also ist $R^\tau = \cap_{\alpha>0} R^\tau_\alpha$ eine Nullmenge und daher hat $(R^\tau)^c = \Delta^\tau$ volles Maß. □

Bemerkung 2.3.
Δ^τ hat leeres Inneres, da Δ^τ keine rationalen Vektoren enthält.

Wir unterdrücken nun den Index τ und definieren

$$\Omega_\alpha := \{\omega \in \Delta_\alpha \cap \Omega | \text{dist}(\omega, \partial\Omega) \geq \alpha\}.$$

Der Abstand zum Rand garantiert, dass die gestörten Frequenzen noch innerhalb von Ω liegen. Das klassische KAM-Theorem trifft nun eine Aussage darüber, welche Tori eine Störung für genügend kleines ε überstehen.

Satz 2.4 (klassisches KAM-Theorem).
Sei h ein nicht degeneriert integrables hamiltonsches System, die Frequenzabbildung h_p ein Diffeomorphismus $D \to \Omega$ und $H = h + f_\varepsilon$ reell analytisch auf $\bar{D} \times \mathbb{T}^n$. Dann existiert eine Konstant $\delta > 0$ so, dass für

$$|\varepsilon| < \delta\alpha^2$$

alle Kronecker Tori $(\mathbb{T}^n, \omega)$ des ungestörten Systems mit $\omega \in \Omega_\alpha$ als leicht deformierte invariante Lagrange-Tori bestehen bleiben. Des weiteren hängen sie Lipschitz-stetig von ω ab und füllen $D \times \mathbb{T}^n$ bis auf eine Menge mit Maß $O(\alpha)$.

3 Das KAM-Theorem mit Parametern

In diesem Abschnitt werden wir das KAM-Theorem etwas umformulieren, statt uns ein hamiltonsches System anzusehen werden wir eine Familie hamiltonscher Systeme betrachten und in diesen nach invarianten Tori suchen. Später werden wir daraus, dass klassische KAM-Theorem folgern. Wir schreiben nun $\boldsymbol{p = p_0 + I}$ und entwickeln h um p_0:

$$h(p) = h(p_0) + \langle (h_p(p_0), I\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle h_{pp}(p_t)I, I\rangle dt,$$

wobei $p_t = p_0 + tI$ bezeichnet. Nach Annahme ist die Frequenzabbildung ein Diffeomorphismus

$$h_p : D \to \Omega, p_0 \mapsto \omega = h_p(p_0).$$

Wir können also anstelle der $p_0 \in D$ die Frequenzen $\omega \in \Omega$ benutzen, da diese p_0 eindeutig bestimmen. Außerdem schreiben wir $\boldsymbol{\theta}$ **statt** $\boldsymbol{q}$ für die Winkelkoordinaten und bezeichnen $h(p_0) = e(\omega)$, $P_h(I, \omega) = \int_0^1 (1-t)\langle h_{pp}(p_t)I, I\rangle dt$ und $P_\varepsilon(I, \theta, \omega) = f_\varepsilon(p, \theta)$. Dann ist der gestörte Hamiltonian gegeben durch $H = N + P$, mit

$$N = e(\omega) + \langle \omega, I\rangle \quad \text{und} \quad P = P_h(I, \omega) + P_\varepsilon(I, \omega, \theta).$$

Diese Funktionen sind reell analytisch in den Koordinaten $(I, \theta) \in B \times \mathbb{T}$ für einen genügend kleinen Ball B um den Ursprung in $\mathbb{R}^n$. Die Frequenz ω wird als Parameter betrachtet.

Für $P = 0$ reduziert sich die Familie von hamiltonschen Systemen auf die Normalform $N = e(\omega) + \langle \omega, I\rangle$. Dann existiert offensichtlich der invariante Kronecker Torus

$$\mathcal{T}_\omega = \{0\} \times \mathbb{T}^n \subset B \times \mathbb{R}^n$$

mit konstanten hamiltonschen Vektorfeld

$$X_N = \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}$$

für jedes $\omega \in \Omega$ und alle sind gegeben durch die Familie

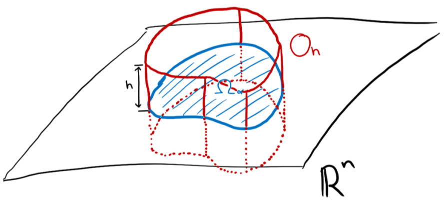
$$\phi_0 : \mathbb{T}^n \times \Omega \to B \times \mathbb{T}^n;\ (\theta, \omega) \mapsto (0, \theta)$$

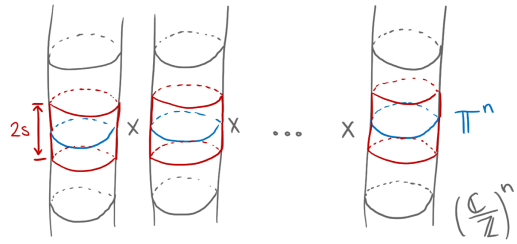
von trivialen Einbettungen des Torus.
Um das Theorem formulieren zu können, führen wir folgende Notationen ein

$$D_{r,s} = \{I| \, |I| < r\} \times \{\theta| \, |\mathrm{Im}(\theta)| < s\} \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$$

$$O_h = \{\omega| \, \mathrm{dist}(\omega, \Omega_\alpha) < h\} \subset \mathbb{C}^n$$

wobei $|.|$ die Supremumsnorm auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Die Suprmumsnorm von Funktionen auf $D_{r,s} \times O_h$ bezeichnen wir mit $|.|_{r,s,h}$. $D_{r,s}$, O_h sind komplexe Umgebungen von $\{0\} \times \mathbb{T}^n$, Ω_α.





Definition 3.1 (Lipschitz-Konstante).
Für Lipschitz-stetige φ Funktionen definieren wir die Konstante

$$|\varphi|_{\mathcal{L}} = \sup_{v \neq \omega} \frac{\varphi(v) - \varphi(\omega)}{v - \omega}$$

Nun können wir eine weitere Version des KAM-Theorems mit Parametern formulieren.

Satz 3.2 (Theorem A).
Sei $H = N + P$ und P reell analytisch auf $D_{r,s} \times O_h$. Falls nun

$$|P|_{r,s,h} \leq \gamma \alpha r s^\tau, \quad \alpha s^\tau \leq h$$

für eine kleine Konstante γ die nur von τ und n abhängt und $r, s, h \leq 1$, dann existiert eine Lipschitz-stetige Abbildung $\varphi : \Omega_\alpha \to \Omega$ nahe der Identität und eine Lipschitz-stetige Familie von reell analytischen Tori-Einbettungen $\phi : \mathbb{T}^n \times \Omega_\alpha \to B \times \mathbb{T}^n$ nahe ϕ_0, so dass für jedes $\omega \in \Omega_\alpha$ der eingebettete Torus Lagrange ist und

$$X_{H_{\varphi(\omega)}} \circ \phi = D\phi \cdot X_{N_\omega}.$$

Wobei H_ω die Funktion $B \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$; $(I, \theta) \mapsto H(\omega(p_0), I, \theta)$ bezeichnet. Des weiteren ist ϕ für jedes $\omega \in \Omega_\alpha$ auf $T_\star = \{\theta : |Im(\theta)| < s/2\}$ reell analytisch und

$$\max\{|W(\phi - \phi_0)|, \alpha s^\tau |W(\phi - \phi_0)|_{\mathcal{L}}\} \leq \frac{c}{\alpha r s^\tau} |P|_{r,s,h},$$

$$\max\{|\varphi - id|, \alpha s^\tau |\varphi - id|_{\mathcal{L}}\} \leq \frac{c}{r} |P|_{r,s,h},$$

gleichmäßig auf $T_\star \times \Omega_\alpha$ beziehungsweise Ω_α. Wobei c eine Konstante ist, die nur von n, τ abhängt. W ist definiert als $W = diag(r^{-1}Id, s^{-1}Id)$.

Das Theorem besagt, für jedes $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_\alpha = \varphi(\Omega_\alpha) \subset \Omega$ lässt das Vektorfeld $X_{H_{\tilde{\omega}}}$ einen invarianten Kronecker-Torus $\mathcal{T}_\omega = \phi(\omega, \mathbb{T}^n)$ mit der Frequenz $\omega = \varphi^{-1}(\tilde{\omega})$ zu. Jeder dieser Tori ist Lagrange und nahe des zugehörigen ungestörten Torus.
Die Abschätzungen von ϕ und φ erlauben uns dass Maß von $\tilde{\Omega}_\alpha$ zu kontrollieren. Dazu erweitern wir zunächst φ auf Ω.

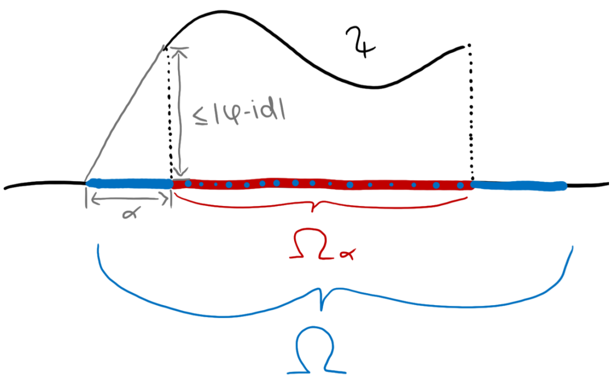
Proposition 3.3. *Die Abbildung φ kann zu einem Lipeomorphismus $\bar{\varphi} : \Omega \to \Omega$ erweitert werden. Für $\bar{\varphi}$ gilt*

$$|\bar{\varphi} - id|_{\mathcal{L}} \leq \max\{|\varphi - id|_{\mathcal{L}}, \alpha^{-1}|\varphi - id|\}.$$

Beweis. Sei ψ eine Koordinaten Funktion von $\varphi - id$ und setzte ψ auf Ω^c gleich Null. Dann gilt

$$|\psi|_{\mathcal{L}} \leq \max\left(|\varphi - id|_{\mathcal{L}}, \alpha^{-1}|\varphi - id|\right) < 1$$

Die erste Ungleichung folgt wie in der Abbildung verdeutlicht, die zweite in dem



man γ so klein wählt, dass $\gamma c < 1$. Wir können nun ψ durch die Funktion

$$\bar{\psi}(x) = \sup_{z \in \Omega_\alpha \cup \Omega^c} \{\psi(z) - \lambda|x - z|\}$$

mit $\lambda = |\psi|_{\mathcal{L}}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig fortsetzten. Tatsächlich gilt $\bar{\psi}|_{\Omega_\alpha \cup \Omega^c} = \psi$ außerdem ist $\bar{\psi}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $|\psi|_{\mathcal{L}}$ denn mit der Dreiecksungleichung gilt

$$\psi(z) - \lambda|y - z| \geq \psi(z) - \lambda|x - z| - \lambda|y - x|.$$

Nimmt man nun dass Supremum über beide Seiten erhält man

$$\bar{\psi}(y) \geq \bar{\psi}(x) - \lambda|y - x|.$$

Vertauscht man x und y im Beweis erhält man insgesamt

$$|\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(y)| \leq \lambda|x - y|$$

also die Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante $\lambda = |\psi|_{\mathcal{L}}$. Wir können dies mit jeder Koordinaten Funktion von $\varphi - id$ machen und so φ durch $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi}|_{\Omega^c} = id$ fortsetzen und

$$|\bar{\varphi} - id|_{\mathcal{L}} = |\psi|_{\mathcal{L}} < 1.$$

Also ist $\bar{\varphi}$ ein Lipeomorphismus[3] auf $\mathbb{R}^n$, da er die Identität außerhalb von Ω ist, ist er auch eingeschränkt auf Ω ein Lipeomorphismus.

□

Nun können wir das Maß von $\tilde{\Omega}_\alpha$ abschätzen.

Proposition 3.4. *Es gilt die Abschätzung*

$$\mu(\Omega - \varphi(\Omega_\alpha)) = \mathcal{O}(\alpha),$$

wobei die implizite Konstante nur von Ω abhängt.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega - \tilde{\Omega}_\alpha) &= \mu(\Omega - \varphi(\Omega_\alpha)) \\
&= \mu(\Omega - \bar{\varphi}(\Omega_\alpha)) \\
&= \mu(\bar{\varphi}(\Omega - \Omega_\alpha)) \\
&\leq |\bar{\varphi}|_{\mathcal{L}}\, \mu(\Omega - \Omega_\alpha) \\
&= \mathcal{O}(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5. *Man kann auch ϕ zu einer Lipschitz-stetigen Familie reell analytischer Torus Einbettungen*

$$\bar{\phi} : \mathbb{T}^n \times \Omega \to B \times \mathbb{T}^n$$

erweitern, so dass jeder eingebettete Torus Lagrange ist und die zuvor gezeigten Abschätzungen immer noch gelten nur mit anderen Proportionalitätskonstanten.

4 Folgerung des klassischen KAM-Theorems

Wir werden nun das klassische KAM-Theorem aus Theorem A folgern und dabei die Bedeutung der vorkommenden Parameter und Abbildungen besser verstehen. Wir hatten $H = N + P$ geschrieben wobei $P = P_h + P_\varepsilon$ reell analytisch auf $B \times \bar{\Omega} \times \mathbb{T}^n$ für einen kleinen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ um den Ursprung. Nun können wir kleine h und s mit $s^\tau < h$ festlegen, so dass P reell analytisch auf $D_{r,s} \times O_h$ für kleine r ist. Dann ergibt sich folgende Abschätzung

$$|P|_{r,s,h} \leq |P_h|_{r,s,h} + |P_\varepsilon|_{r,s,h} = |\int_0^1 (1-t)\langle h_{pp}(p_t)I, I\rangle dt|_{r,s,h} + |f_\varepsilon|_{r,s,h} \leq Mr^2 + F\varepsilon,$$

wobei M eine Schranke für die Hessematrix von h ist und $F = \sup_{p,q,\varepsilon} |f^*(p,q,\varepsilon)|$. Wir verkleinern nun r oder ϵ so, dass $F\varepsilon = Mr^2$, also

$$|P|_{r,s,h} \leq 2F\varepsilon.$$

[3]Allgemein gilt für eine Lipschitz-stetige Funktion $F : M \to M$ mit $M \subset X$ abgeschlossen, X vollständiger metrischer Raum. Falls $\lambda = |F|_{\mathcal{L}} < 1$ ist $F + id : M \to M$ ein Lipeomorphismus.

Wir können Theorem A anwenden, falls

$$|P|_{r,s,h} \leq \gamma\alpha r s^\tau$$

für ein kleines γ welches nur von τ und n abhängt. Nun kann man, da $2F\varepsilon \sim r^2$ und $\gamma\alpha r s^\tau \sim r$, r und somit ε weiter verkleinern, bis

$$2F\varepsilon \leq \gamma\alpha r s^\tau$$

gilt. Aufgrund unserer Wahl von r ergibt sich die Bedingung an ε, dass

$$2F\varepsilon \leq \gamma\alpha r s^\tau = \gamma\alpha s^\tau \sqrt{\frac{F\varepsilon}{M}}.$$

Welche wir Umformen zu

$$\varepsilon \leq \delta\alpha^2 \qquad \text{mit } \delta := \frac{\gamma^2 s^{2\tau}}{4FM}$$

also können wir Theorem A anwenden, falls $\varepsilon \leq \delta\alpha^2$. Nach Konstruktion entspricht ein Orbit $(I(t), \theta(t))$ des Hamiltonians H bei $\tilde{\omega}$, gerade dem Orbit $(p_0(\tilde{\omega}) + I(t), q(t))$ in den Koordinaten (p, q). Mit den Propositionen 3.3 und 3.4 folgt, dass die Abbildung Ψ,

$$\Psi : B \times \Omega \times \mathbb{T}^n \to D \times \mathbb{T}^n;\ (I, \omega, \theta) \mapsto (h_p^{-1}(\omega) + I(t), \theta(t))$$

die eine Komposition von $\bar{\phi}$ und $\bar{\varphi}$ ist, ist für jedes $\omega \in \Omega_\alpha$ die Einbettung eines invarianten Lagrange-Torus. Wobei Ψ lipschitz-nahe an der trivialen Einbettung

$$\Psi_0 : \{0\} \times \Omega \times \mathbb{T}^n \to D \times \mathbb{T}^n;\ (\omega, \theta) \mapsto (h_p^{-1}(\omega), \theta)$$

liegt. Daher folgt, dass das Maß des Komplements all dieser Tori von Ordnung $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) = \mathcal{O}(\alpha)$ ist.

Literatur

[1] Pöschel, A lecture on the classical KAM-theorem

[2] Wayne, An Introduction to KAM Theory